平面旋转与空间旋转

0 前言

你可能有三角函数的基础，却未曾推导过平面旋转公式；或者熟知平面旋转公式，不过对空间旋转不甚了解；或者知晓空间旋转，却仍无法很好地理解四元数；或者看过四元数的科普视频或文章，但对四元数的由来仍抱有疑惑. 那么这篇文章便是写给你看的；即使熟知四元数，甚至用四元数实现过空间旋转，也可以看看这篇文章，作为思路整理、知识复习和角度拓展.

在这篇文章里，我将分别讨论平面旋转与空间旋转，从历史的角度深入阐释四元数的由来，用简明的语言论证四元数的性质与空间旋转公式，最后比较多种旋转公式的优劣. 本文并不侧重于复数与四元数的可视化，如有需要可以参考 3blue1brown 的视频 (复数，四元数)；本文中我们也不会讨论运动的分类，而只着眼于旋转这一情况；

阅读本文需要有高中的数学基础，并了解行列式与矩阵的定义；个别地方用到了抽代的概念，不知道可以跳过，不影响整体的理解；1.3、2.3、2.4 这三节是从我笔记里复制过来的，给没有学过的人看的话易读性可能会比较差（提前谢罪）.

1 平面旋转

1.1 解析几何

1.1.1 点关于点的旋转

在平面几何中，用直角坐标计算角度是相对繁琐的，参数中含有角度的极坐标更适合求解旋转. 因此我们希望利用极坐标的思路，求解直角坐标系中的旋转公式.

欲求点 (x_1, y_1) 关于原点顺时针旋转 β 后的坐标，将点表示为

$$(x_1, y_1) = (r\cos\alpha, r\sin\alpha), \tag{1}$$

于是旋转后的坐标 (x, y) 可表示为

$$\begin{cases} x = r\cos(\alpha+\beta) = x_1\cos\beta - y_1\sin\beta, \\ y = r\sin(\alpha+\beta) = x_1\sin\beta + y_1\cos\beta. \end{cases} \tag{2}$$

更一般的，利用平移，点 (x_1, y_1) 关于点 (x_0, y_0) 旋转 β 后的坐标可表示为

$$\begin{cases} x = (x_1 - x_0)\cos\beta - (y_1 - y_0)\sin\beta, \\ y = (x_1 - x_0)\sin\beta + (y_1 - y_0)\cos\beta. \end{cases} \tag{3}$$

1.1.2 线关于点的旋转

欲求直线 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 关于原点顺时针旋转 β 后的坐标，我们单独研究直线上的每一点 (x_1, y_1)，有

$$\begin{cases} x = x_1\cos\beta - y_1\sin\beta, \\ y = x_1\sin\beta + y_1\cos\beta. \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_1 = x\cos\beta + y\sin\beta, \\ y_1 = -x\sin\beta + y\cos\beta. \end{cases} \tag{4}$$

上式可联立方程解得，也可以直接根据 (x_1, y_1) 可看作由 (x, y) 绕原点顺时针旋转 $-\beta$ 而得. 代入直线方程，消去 x_1, y_1，得旋转后的直线为

$$(A_1\cos\beta - B_1\sin\beta)x + (A_1\sin\beta + B_1\cos\beta)y + C = 0. \tag{5}$$

关于任意点 (x_0, y_0) 的旋转公式是类似的，只需要将上式的 x 和 y 分别替换为 $(x - x_0)$ 和 $y - y_0$ 即可.

记旋转后的直线为 $Ax + By + C = 0$，于是有系数变换

$$\begin{cases} A = A_1\cos\beta - B_1\sin\beta, \\ B = A_1\sin\beta + B_1\cos\beta. \end{cases} \tag{6}$$

注意到上式与（2）式形式相同，这是因为对直线的旋转，也是对直线的法向量 (A_1, B_1) 的旋转. 同时 C 保持不变，这是因为旋转只改变法向量的方向，而不改变其长度.

1.2 旋转矩阵

1.2.1 二阶矩阵

由矩阵及其乘法的定义，（2）（6）的变换方程可表示为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

其中左乘的矩阵称为旋转矩阵，简记为 $[R_\beta]$. 这样的记号是有好处的，因为它将角度与坐标分开了，便于研究变换的复合；这里的中括号是沿用了复分析里的习惯，不加中括号则表示旋转变换，加了中括号则表示旋转矩阵.

尽管矩阵乘法具有结合律，若干个矩阵相乘，从左向右算或从右向左算都可以得到正确的答案，但作为变换看待的矩阵，应当理解为从右向左算，因为这对应了逐次的变换. 这并不奇怪，一般来说映射也是从右向左算的，而左乘矩阵实际上可以看作多元函数.

由上，可以验证旋转矩阵具有如下性质：

1. $\det[R_\alpha] = 1$.
2. $[R_\alpha]^{-1} = [R_{-\alpha}] = [R_\alpha]^{\mathrm{T}}$.
3. $[R_\beta][R_\alpha] = [R_{\alpha+\beta}] = [R_\alpha][R_\beta]$.

1.2.2 三阶矩阵

对于任意点 (x_0, y_0) 的旋转，可以同样地表示为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

不过平移不是线性变换，无法分离出矩阵，除非使用三阶矩阵：

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

不过代价是存储空间与计算量的增大. 有兴趣的读者可以思考一下旋转变换 $[R_\alpha]$ 与伸缩变换 $(x, y) = (kx_1, ky_1)$ 对应的三阶矩阵是什么，不过这不是本文的重点.

1.3 复数旋转

1.3.1 复数代数

对于复数及其运算，这里仅作回顾. 记 $\mathrm{i}^2 = -1$，则 $z \in \mathbb{C}$ 可表示为

1. 直角坐标：$z = a + b\mathrm{i}$，其中 $a \in \mathbb{R}$ 称为实部，$b \in \mathbb{R}$ 称为虚部.
2. 极坐标系：$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，其中 $r \in \mathbb{R}$ 称为模长，$\theta \in \mathbb{R}$ 称为幅角.

换算关系由欧拉公式给出：$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，并且有如下计算法则

1. 加法：$(a_1 + b_1\mathrm{i}) + (a_2 + b_2\mathrm{i}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathrm{i}$.
2. 乘法：$r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} \cdot r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} = r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$.

将复数看作平面上的点，并称该平面为复平面：

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to \mathbb{R}^2 \\ a + b\mathrm{i} &\mapsto (a, b) \end{aligned}$$

于是复数加法可以看作平移变换，复数乘法可以看作伸缩旋转，从而可以用于求解旋转变换，具体见下一节.

上面我们回忆了直角坐标下的复数加法与极坐标下的复数乘法，其它运算不是本文的重点. 不过其中极坐标下具有相同模长的复数相加减，比较有趣，但也常被教学所忽略，结论如下，有兴趣的读者可以尝试用代数与几何的方法分别证明.

1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = 2\cos\dfrac{\theta-\phi}{2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\theta+\phi)}{2}}$.
2. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = 2\mathrm{i}\sin\dfrac{\theta-\phi}{2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\theta+\phi)}{2}}$.

1.3.2 复数变换

保向变换如下，直接抄了之前的笔记，以后可能会补充解释.

- **恒等变换**: $\mathcal{E}(z) = z$.
- **平移变换**: $\mathcal{T}_v(z) = z + v$.
  - 复合: $\mathcal{T}_w \circ \mathcal{T}_v = \mathcal{T}_{w+v}$.
  - 逆元: $\mathcal{T}_v^{-1} = \mathcal{T}_{-v}$.
- **旋转变换**: $\mathcal{R}_a^\theta$.
  - 复合: $\mathcal{R}_a^\phi \circ \mathcal{R}_a^\theta = \mathcal{R}_a^{\phi+\theta}$.
  - 逆元: $(\mathcal{R}_a^\theta)^{-1} = \mathcal{R}_a^{-\theta}$.
  - 分解:
    - $\mathcal{R}_a^\theta(z) = (\mathcal{T}_a \circ \mathcal{R}_0^\theta \circ \mathcal{T}_a^{-1})(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-a) + a$.
    - $\mathcal{R}_a^\theta = \mathcal{T}_k \circ \mathcal{R}_0^\theta$, 其中 $k = a(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.
  - 复合:
    - $\mathcal{T}_v \circ \mathcal{R}_a^\theta = \mathcal{R}_c^\theta$, 其中 $c = a + \dfrac{v}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.
    - $\mathcal{R}_a^\theta \circ \mathcal{T}_v = \mathcal{R}_c^\theta$, 其中 $c = a + \dfrac{v\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$.
    - $(\mathcal{R}_b^\beta \circ \mathcal{R}_a^\alpha)(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}z + a(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} + b(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})$.
      - 当 $\alpha+\beta \neq 2k\pi$ 时, $\mathcal{R}_b^\beta \circ \mathcal{R}_a^\alpha = \mathcal{R}_c^{\alpha+\beta}$, 其中 $c = \dfrac{a(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} + b(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}}$.
      - 当 $\alpha+\beta = 2k\pi$ 时, $\mathcal{R}_b^\beta \circ \mathcal{R}_a^\alpha = \mathcal{T}_k$. 其中 $k = (b-a)(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})$.

    > 上式可推广至 n 次旋转的组合, 不再赘述.
- **中心伸缩 (位似变换)**: $\mathcal{D}_a^r$.

- **伸缩旋转 (相似变换)**: $\mathcal{D}_a^{r,\theta} \equiv \mathcal{R}_a^\theta \circ \mathcal{D}_a^r \equiv \mathcal{D}_a^r \circ \mathcal{R}_a^\theta$.
  - 复合: $\mathcal{D}_o^{R,\phi} \circ \mathcal{D}_o^{r,\theta} = \mathcal{D}_o^{r,\theta} \circ \mathcal{D}_o^{R,\phi} = \mathcal{D}_o^{Rr,\theta+\phi}$.
  - 逆元: $(\mathcal{D}_a^{r,\theta})^{-1} = \mathcal{D}_a^{1/r,-\theta}$.
  - 分解
    - $\mathcal{D}_a^{r,\theta}(z) = (\mathcal{T}_a \circ \mathcal{D}_o^{r,\theta} \circ \mathcal{T}_a^{-1})(z) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-a)+a$.
    - $\mathcal{D}_a^{r,\theta} = \mathcal{T}_k \circ \mathcal{D}_o^{r,\theta}$, 其中 $k = a(1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.
  - 复合
    - $(\mathcal{D}_b^{R,\beta} \circ \mathcal{D}_a^{r,\alpha})(z) = Rr\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} + a(1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} + b(1-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})$.
      - 当 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} \neq 0$ 时, $\mathcal{D}_b^{R,\beta} \circ \mathcal{D}_a^{r,\alpha} = \mathcal{D}_c^{Rr,\alpha+\beta}$, 其中 $c = \dfrac{a(1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} + b(1-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})}{1-Rr\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}}$.
      - 当 $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} = 0$ 时, $\mathcal{D}_b^{R,\beta} \circ \mathcal{D}_a^{r,\alpha} = \mathcal{T}_k$, 其中 $k = a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} - r) + b(1-R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta})$.

2 空间旋转

2.1 空间旋转思路

2.1.1 旋转思路概述

处理空间旋转，常见的思路有：

1. 利用欧拉角
   1. 经典欧拉角.
   2. 泰特布莱恩角.
2. 利用轴角
   1. 罗德里格斯旋转公式.
   2. 四元数旋转公式.
3. 利用莫比乌斯变换.
4. 利用矩阵.

其中利用欧拉角的方法，最直观，参数也最少 (3 个参数)，并且也有利于同时处理旋转与平移变换. 但是为了提高计算效率，往往会存储 6 个单位数据；而且三维空间中的任意一个方向，都可以通过至少两种不同的欧拉角表示，即存在着歧义性问题；此外，欧拉角还存在着万向节死锁的问题.

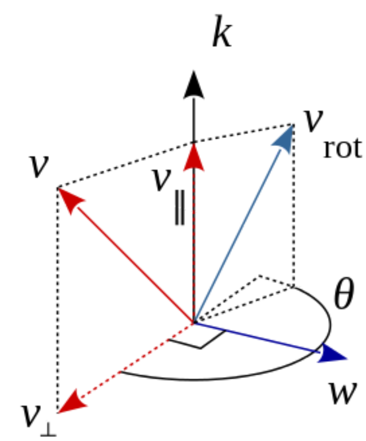
利用轴角可以避免歧义性问题与万向节锁死. 其中罗德里格斯旋转公式易于理解、容易运用，但是计算量大，计算精度较低. 更重要的是，该公式的应用是对应固定的旋转轴而言的，难以求解旋转的复合. 相比之下，四元数形式复杂，难以理解，但是计算量小，需要的存储空间也少，在求解旋转的复合上也有着优势. 但四元数也存在着算法上的缺点，即难以同时处理旋转与位移变换.

利用莫比乌斯线性变换与黎曼球面，虽然思路简明清晰，但是结果非常复杂，而且计算量很大. 不过这个方法的结果可以大大简化四元数旋转公式的推导. 但是由于需要复分析的前置知识，下文将列出结论后直接应用，而不再推导，具体步骤可以参考 Tristan Needham 的《复分析：可视化方法》.

最后的 "利用矩阵"，其实并不能称之为思路，因为旋转矩阵不是凭空出现的，而是由前面的各种方法推导而来. 实际上，以上每一种方法都有相应的矩阵公式，比如四元数既同构于二阶复矩阵的子环，也同构于四阶实矩阵的子环，因此就有了两种矩阵表示.

2.1.2 罗德里格公式

网上有许多文章解释了欧拉角，故这里不再重述. 有兴趣的读者可以参考这篇文章：https://www.zhihu.com/question/47736315. 这里仅介绍罗德里格斯旋转公式，如图（图片来自网络）



先说结论，设转轴的单位方向向量为 $\boldsymbol{k}$，旋转前的向量为 $\boldsymbol{v}$，旋转 θ 后的向量为 $\boldsymbol{v}'$（即图中的 $\boldsymbol{v}_{\mathrm{rot}}$），则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}' &= \cos\theta \boldsymbol{v} + (1-\cos\theta)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k} + \sin\theta \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v} && (11)\\
&= \boldsymbol{v} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}) + \sin\theta\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}. && (12)
\end{aligned}
$$

证明

令 $\boldsymbol{v}$ 平行于 $\boldsymbol{k}$ 的分量为 $\boldsymbol{v}_{//}$，垂直于 $\boldsymbol{k}$ 的分量为 $\boldsymbol{v}_{\perp}$，则 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{//}+\boldsymbol{v}_{\perp}$.

$\boldsymbol{v}'$ 记号同理，并令 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}_{\perp}$，则 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}$. 若消去 $\boldsymbol{v}_{\perp}$，则有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}' &= \boldsymbol{v}_{//} + \boldsymbol{v}'_{\perp}\\
&= \boldsymbol{v}_{//} + (\cos\theta\boldsymbol{v}_{\perp} + \sin\theta\boldsymbol{w})\\
&= \boldsymbol{v}_{//} + \cos\theta(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{//}) + \sin\theta\boldsymbol{w}\\
&= \cos\theta\boldsymbol{v} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{v}_{//} + \sin\theta\boldsymbol{w}\\
&= \cos\theta\boldsymbol{v} + (1-\cos\theta)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k} + \sin\theta\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}.
\end{aligned}
$$

若消去 $\boldsymbol{v}_{//}$，则有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}' &= \boldsymbol{v}_{//} + \boldsymbol{v}'_{\perp}\\
&= (\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{\perp}) + (\cos\theta\boldsymbol{v}_{\perp} + \sin\theta\boldsymbol{w})\\
&= \boldsymbol{v} + (\cos\theta - 1)\times\boldsymbol{v}_{\perp} + \sin\theta\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}\\
&= \boldsymbol{v} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}) + \sin\theta\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}.
\end{aligned}
$$

实际上，上式还可以直接由 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ 得到.

2.1.3 空间旋转矩阵

欲从罗德里格斯旋转公式推导矩阵形式，最大的阻力是叉乘. 故这里引入反对称矩阵，即对于

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix},\tag{13}$$

我们定义 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$ 的反对称矩阵为

$$\boldsymbol{a}^{\wedge}=\begin{bmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{bmatrix}.\tag{14}$$

于是有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^{\wedge}\boldsymbol{b}$，将向量叉乘转换为了矩阵乘法.

记 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，则式（11）与（12）可表示为 $\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}$，其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}&=\cos\theta\boldsymbol{I}+(1-\cos\theta)\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}+\sin\theta\boldsymbol{k}^{\wedge}&(15)\\&=\boldsymbol{I}+(1-\cos\theta)(\boldsymbol{k}^{\wedge})^2+\sin\theta\boldsymbol{k}^{\wedge}.&(16)\end{aligned}$$

记 $\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,k_3)^{\mathrm{T}}$，则展开为矩阵形式后即为

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\cos\theta+{k_1}^2(1-\cos\theta) & {k_1}^2(1-\cos\theta)-k_3\sin\theta & {k_1}^2(1-\cos\theta)+k_2\sin\theta\\ {k_2}^2(1-\cos\theta)+k_3\sin\theta & \cos\theta+{k_2}^2(1-\cos\theta) & {k_2}^2(1-\cos\theta)-k_1\sin\theta\\ {k_3}^2(1-\cos\theta)-k_2\sin\theta & k_1\sin\theta+{k_3}^2(1-\cos\theta) & \cos\theta+{k_3}^2(1-\cos\theta)\end{pmatrix}.\tag{17}$$

注意这里的旋转矩阵是三阶矩阵，之后在四元数中我们会发现还可以表示为二阶复矩阵或三阶实矩阵，只不过其它运算也会发生相应的改变.

2.2 四元数的起源

2.2.1 动机与三元数

由上，利用欧拉角求解空间旋转存在着万向节死锁的问题，罗德里格斯公式计算复杂、难以求解旋转复合，实际上，利用莫比乌斯变换得到的旋转矩阵在应用时也较为繁琐. 因此，我们需要寻找一种便捷且适用性广的求解空间旋转的方法.

我们知道，复数是实数的推广，而复数的乘法恰好对应了复平面上的旋转. 那么可不可以推广复数，使得某种"超复数" 存在某种运算可以对应空间旋转呢？

在 $\mathrm{i}^2=-1$ 的基础上, 补充定义 $\mathrm{j}^2=-1,\mathrm{i}\neq\mathrm{j}$ 是很自然的想法, 于是三元数是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 但是 ij 应该等于多少呢? 由乘法的封闭性, 不妨令

$$\mathrm{ij}=x+y\mathrm{i}+z\mathrm{j},x,y,z\in\mathbb{R}.\tag{18}$$

首先我们看到, $z\neq0$, 否则两端左乘 i 得 $\mathrm{j}=-y+x\mathrm{i}\in\mathbb{C}$, 本质上还是复数.

于是由上式可得

$$\mathrm{j}=\frac{1}{z}(\mathrm{ij}-x-y\mathrm{i}),\tag{19}$$

$$\mathrm{ij}=\frac{1}{z}(-\mathrm{j}-x\mathrm{i}+y),\tag{20}$$

比较系数可得 $z^2=-1, z\notin\mathbb{R}$, 矛盾, 从而 ij 不能由上述三元数表示.

这个反证法的思路与 $\sqrt{2}$ 不是有理数的证明类似. 不过 $\sqrt{2}$ 虽然不属于有理数, 但属于实数, 有没有可能寻找到更大的代数系统, 使得乘法的封闭性得以满足呢?

2.2.2 四元数的起源

自然的想法是令 $\mathrm{k}=\mathrm{ij}\notin\mathbb{C}$, 同样自然的, 我们令 $\mathrm{ij}=\mathrm{ji}$, 即满足交换律, 于是 $\mathrm{k}^2=1$. 现在我们知道, 这样的代数系统称为双复数, 不过更常见的定义是令 $\mathrm{i}^2=-1, \mathrm{j}^2=1, \mathrm{ij}=\mathrm{ji}=\mathrm{k}$, 其子环 $\mathbb{R}[\mathrm{i}]$ 称为圆复数 (即复数 $\mathbb{C}$), 而 $\mathbb{R}[\mathrm{j}]$ 称为双曲复数. 顾名思义, 双曲复数与双曲线有着密不可分的联系, 不过不是这里讨论的重点.

旋转运动是可逆的, 因此我们希望四元数除零元外都可逆. 双复数不能作为我们理想的 "四元数", 因为双复数有零因子, 从而双复数的乘法未必可逆. 例如 $(1+\mathrm{k})(1-\mathrm{k})=0$, 假设零因子 $1+k$ 有逆元且为 a^{-1}, 等式两端左乘 a^{-1}, 得 $\mathrm{k}=1$, 从而矛盾.

似乎又陷入了窘境, 而且这样构造出来的双复数在运算上不具有轮换对称性, 并不美观. 不过回过头来, 我们希望的是通过三元或四元的 "超复数" 来研究三维的空间旋转, 空间旋转又具有怎样的性质呢? 我们惊讶地发现, 空间旋转并不满足交换律! 随便拿起一支笔或一颗魔方, 便可以验证这一点.

如果让四元数也不满足交换律呢? 实数是满足交换律的, 因此我们令 $\mathrm{ij}\neq\mathrm{ji}$, 但具体是怎样的关系呢? 互为相反数是最简单的, 即 $\mathrm{ij}=-\mathrm{ji}$, 于是我们可以推得 $\mathrm{k}^2=-1, \mathrm{jk}=-\mathrm{kj}, \mathrm{ki}=-\mathrm{ik}$, 这些运算恰好也是轮换对称的.

进一步我们还可以得到这种定义的四元数的诸多良好性质, 其中就包括非零元必有逆, 并且可以利用四元数方便地求解空间旋转的复合和效果. 这些就是接下来要推导的了. 即使抛开实际应用, 四元数作为纯数学, 内容也是丰富而有趣的.

最后, 数学之外的有关哈密顿发现四元数的故事, 有兴趣可以看看这篇文章：https://zhuanlan.zhihu.com/p/150699389

2.2.3 超复数的分类

以上我们探索了三种形式的超复数, 作为复数的 "扩展", 它们的定义分别是:

1. $\mathrm{i}^2=-1, \mathrm{j}^2=-1, \mathrm{ij}=\mathrm{ji}=\mathrm{k}$. (双复数的等价超复数)
2. $\mathrm{i}^2=-1, \mathrm{j}^2=1, \mathrm{ij}=\mathrm{ji}=\mathrm{k}$. (双复数)
3. $\mathrm{i}^2=-1, \mathrm{j}^2=-1, \mathrm{ij}=-\mathrm{ji}=\mathrm{k}$. (四元数)

从形式上看, 只剩下一个有待研究:

4. $\mathrm{i}^2=-1, \mathrm{j}^2=1, \mathrm{ij}=-\mathrm{ji}=\mathrm{k}$. (反四元数)

这种超复数称为分裂四元数或反四元数, 与双复数一样, 它也有非零元无逆, 如 $\dfrac{1+\mathrm{j}}{2}$ 即为幂等的零因子, 因此反四元数的性质也没有四元数好.

最后, 我们之后使用的四元数单位的字体与前文不同, 不再是正体. 四元数单位之所以要使用大写的粗斜体, 是为了与复数单位区分. 由复数推广至四元数是自然的, 但是之后在研究四元数时, 常将其同构映射为复矩阵, 此时若不用粗斜体, 则容易混淆; 而小写的粗斜体常用于表示空间向量, 因此表示为 $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$ 是最为清晰的.

2.3 四元数的代数

2.3.1 基本性质

1 四元数的概念

- 定义 $\mathbb{V}$
  - $\boldsymbol{I}^2=\boldsymbol{J}^2=\boldsymbol{K}^2=\boldsymbol{IJK}=-1.$
  - $\mathbb{V}=v\mathbf{1}+v_1\boldsymbol{I}+v_2\boldsymbol{J}+v_3\boldsymbol{K}.$
  - 读者可验证上述定义与上一节中的定义等价.
- 备注
  - 这里使用空心字母表示四元数元素, 而非集合, 以区分于标量和向量.
  - 这里四元数单位使用粗斜体, 表明它是 (四维实) 向量或 (二阶复) 矩阵.
  - 有的资料上使用正体表示四元数单位, 表明它是标量常数; 这里不建议如此表示.
- 概念
  - 数量部分: $v=v\mathbf{1}.$
  - 向量部分: $\boldsymbol{V}=v_1\boldsymbol{I}+v_2\boldsymbol{J}+v_3\boldsymbol{K}.$
  - 纯四元数: $\mathbb{V}=\boldsymbol{V}.$

2 基本代数性质

- 性质
  - $\boldsymbol{IJ}=\boldsymbol{K},\ \boldsymbol{JK}=\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{KI}=\boldsymbol{J}.$
  - $\boldsymbol{IJ}=-\boldsymbol{JI},\ \boldsymbol{JK}=-\boldsymbol{KJ},\ \boldsymbol{KI}=-\boldsymbol{IK}.$
  - $\boldsymbol{IJK}=\boldsymbol{JKI}=\boldsymbol{KIJ}=-1.$
- 乘法
  - $\boldsymbol{VW}=-\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{W}+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W}.$
  - $\mathbb{VW}=(vw-\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{W})+(v\boldsymbol{W}+w\boldsymbol{V}+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W}).$
- 备注
  - 将四元数集合视为 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 加法与乘法都是通常意义下的.
  - 将纯四元数视为三维空间向量, 点积与叉积都是通常意义下的.
  - 四元数无乘法交换律, 不能成域, 而只能构成环, 称为哈密顿四元数除环 $\mathbb{H}$.

3 两种矩阵同构

注: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ 表示域 $\mathbb{F}$ 上由 n 阶矩阵构成的一般线性群.

- 二阶复矩阵

$$\begin{aligned}\phi_1:\quad & Q_4\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})\\ & \mathbb{V}=a\mathbf{1}+b\boldsymbol{I}+c\boldsymbol{J}+d\boldsymbol{K}\\ & \mapsto\begin{pmatrix}a-d\mathrm{i} & -b+c\mathrm{i}\\ b+c\mathrm{i} & a+d\mathrm{i}\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{21}$$

- $\boldsymbol{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 对应于 $1(z) = z$, 即恒等变换.
- $\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$, 对应于 $I(z) = \dfrac{1}{z}$, 即黎曼球面绕 x_1 轴旋转 $180°$.
- $\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 对应于 $J(z) = -\dfrac{1}{z}$, 即黎曼球面绕 x_2 轴旋转 $180°$.
- $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$, 对应于 $K(z) = -z$, 即黎曼球面绕 x_3 轴旋转 $180°$.

- 四阶实矩阵

$$\begin{aligned} \phi: \quad & Q_4 \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}) \\ & \mathbb{V} = a\boldsymbol{1} + b\boldsymbol{I} + c\boldsymbol{J} + d\boldsymbol{K} \\ & \mapsto \begin{pmatrix} a & -b & d & -c \\ b & a & -c & -d \\ -d & c & a & -b \\ c & d & b & a \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{22}$$

其中四元数单位被映射为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{1} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{I} \mapsto \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ & & & -1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{J} \mapsto \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{K} \mapsto \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & -1 \\ -1 & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{23}$$

- 备注
  - 以下将 Q_4 与 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 中的元素看成是相等的, 而不采用 $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ 的同构.
  - 想要通过计算机求解四元数运算, 可以利用矩阵形式.

2.3.2 常用算符

1 共轭性质

共轭 $\overline{\mathbb{V}}$ 是对于四元数而言的, 而非矩阵共轭.

- $\overline{\mathbb{V}} := \mathbb{V}^*$ (相应矩阵的共轭转置).
- $\overline{\mathbb{V}} = v - \boldsymbol{V}$.
- $\overline{\boldsymbol{V}\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{V}$. (注意顺序)
- $\overline{\mathbb{V}\mathbb{W}} = \overline{\mathbb{W}}\,\overline{\mathbb{V}}$. (注意顺序)

证明

(1) 式为矩阵共轭定义, (2) 式为向量共轭定义, 由矩阵表示可知二者等价.

$$
\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{V}\boldsymbol{W}} &= \overline{\sum v_i w_i \boldsymbol{I}^2 + \sum v_i w_j \boldsymbol{I}\boldsymbol{J}} \\
&= -\sum v_i w_i - \sum v_i w_j \boldsymbol{K} \\
&= -\sum v_i w_i + \sum v_i w_j \boldsymbol{J}\boldsymbol{I} \\
&= \boldsymbol{W}\boldsymbol{V} = \overline{\boldsymbol{W}}\,\overline{\boldsymbol{V}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbb{V}\mathbb{W}} &= \overline{(v+\boldsymbol{V})(w+\boldsymbol{W})} \\
&= \overline{vw + v\boldsymbol{V} + w\boldsymbol{W} + \boldsymbol{V}\boldsymbol{W}} \\
&= vw - v\boldsymbol{V} - w\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}\boldsymbol{V} \\
&= (w-\boldsymbol{W})(v-\boldsymbol{V}) = \overline{\mathbb{W}}\,\overline{\mathbb{V}}.
\end{aligned}
$$

2 长度性质

长度 $|\mathbb{V}|$ 又称为二范数.

- $|\mathbb{V}|^2 := \mathbb{V}\overline{\mathbb{V}} = \overline{\mathbb{V}}\mathbb{V} = \left|\overline{\mathbb{V}}\right|^2$.
- $|\boldsymbol{V}|^2 = -\boldsymbol{V}^2 = -\boldsymbol{V}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}$.
- $|\mathbb{V}|^2 = v^2 + |\boldsymbol{V}|^2 = v^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^3$.
- $|\mathbb{V}\mathbb{W}| = |\mathbb{V}|\,|\mathbb{W}|$.
- $|\mathbb{V}|^2 = \det(\mathbb{V})$.

证明

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{V}|^2 = -\boldsymbol{V}\boldsymbol{V} = \sum v_i^2 + \sum v_i v_j(\boldsymbol{I}\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}\boldsymbol{I}) = \sum v_i^2 = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{V}. \\
|\mathbb{V}|^2 = v^2 - \boldsymbol{V}^2 = v^2 + |\boldsymbol{V}|^2 = v^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2. \\
\left|\overline{\mathbb{V}}\right|^2 = v^2 + |-\boldsymbol{V}|^2 = |\mathbb{V}|^2. \\
|\mathbb{V}\mathbb{W}|^2 = \mathbb{V}\mathbb{W}\overline{\mathbb{V}\mathbb{W}} = \mathbb{V}\;\mathbb{W}\overline{\mathbb{W}}\;\overline{\mathbb{V}} = \mathbb{V}\overline{\mathbb{V}}|\mathbb{W}|^2 = |\mathbb{V}|^2|\mathbb{W}|^2. \\
\det(\mathbb{V}) = (v - v_3\mathrm{i})(v + v_3\mathrm{i}) - (-v_1 + v_2\mathrm{i})(v_1 + v_2\mathrm{i}) = v^2 + \sum v_i^2.
\end{aligned}
$$

3 逆与伴随

- 定义: $\mathbb{V}\mathbb{V}^{-1} = \mathbb{V}^{-1}\mathbb{V} = 1$.
- 计算: $\mathbb{V}^{-1} = \dfrac{\overline{\mathbb{V}}}{|\mathbb{V}|^2} = \dfrac{\mathbb{V}^*}{|\mathbb{V}|^2}$. (向量形式和矩阵形式)
- 旋转: $(\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi})^{-1} = (\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi})^* = \overline{\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}} = \mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{-\psi} = \mathbb{R}_{-\boldsymbol{v}}^{\psi}$.
- 共轭转置: $\overline{\mathbb{V}} = \mathbb{V}^* = \mathrm{adj}(\mathbb{V})$. (伴随矩阵)
- 模长: $\left|\mathbb{V}^{-1}\right| = |\mathbb{V}|^{-1}$.
- 交换: $\overline{\mathbb{V}^{-1}} = \overline{\mathbb{V}}^{-1}$.

证明

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}^{-1} &= \frac{|\mathbb{V}|^2\mathbb{V}^{-1}}{|\mathbb{V}|^2} = \frac{\mathbb{V}^*\mathbb{V}\,\mathbb{V}^{-1}}{|\mathbb{V}|^2} = \frac{\mathbb{V}^*}{|\mathbb{V}|^2}.\\
\operatorname{adj}(\mathbb{V}) &= \det(\mathbb{V})\mathbb{V}^{-1} = |\mathbb{V}|^2\mathbb{V}^{-1} = \mathbb{V}^*.\\
\overline{\mathbb{V}^{-1}} &= \frac{\mathbb{V}}{|\mathbb{V}|^2} = \frac{\mathbb{V}}{\left|\overline{\mathbb{V}}\right|^2} = \overline{\mathbb{V}}^{-1}.
\end{aligned}
$$

2.3.3 其它性质

1 单位四元数

单位四元数 ($|\mathbb{V}| = 1$) 不一定是四元数单位.

- $\left|\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\right| = 1.$
- $\overline{\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}} = \mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{-\psi}.$
- 当且仅当 $\mathbb{A}^2 = -1$ 时, $\mathbb{A}$ 是纯的单位四元数.
- $\forall \mathbb{Q}, \exists \boldsymbol{v}, \psi : \mathbb{Q} = |\mathbb{Q}|\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}.$

证明

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\right| &= \left|\cos\frac{\psi}{2} + \boldsymbol{V}\sin\frac{\psi}{2}\right| = \cos^2\frac{\psi}{2} + |\boldsymbol{V}|^2\sin^2\frac{\psi}{2} = 1.\\
\overline{\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}} &= \cos\frac{\psi}{2} + (-\boldsymbol{V})\sin\frac{\psi}{2} = \cos\frac{-\psi}{2} + \boldsymbol{V}\sin\frac{-\psi}{2} = \mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{-\psi}.\\
\mathbb{A}^2 &= (a+\boldsymbol{A})^2 = a^2 + 2a\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 = -1 \Rightarrow a = 0.\\
\boldsymbol{A}^2 &= -|\boldsymbol{A}|^2 = -1 \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \text{ 是纯的单位四元数}.
\end{aligned}
$$

第四点解方程即得 (有两解).

2 二元的运算

- 点积 (内积)
  - $\mathbb{P}\cdot\mathbb{Q} := pq + \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}.$
  - $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q} = -\dfrac{\boldsymbol{PQ}+\boldsymbol{QP}}{2}.$
  - $\mathbb{P}\cdot\mathbb{Q} = \dfrac{\mathbb{P}^*\mathbb{Q}+\mathbb{Q}^*\mathbb{P}}{2}.$
- 叉积 (矢积, 向量积)
  - $\mathbb{P}\times\mathbb{Q} := \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}.$
  - $\mathbb{P}\times\mathbb{Q} = \dfrac{\mathbb{PQ}-\mathbb{QP}}{2}.$
- 外积
  - $\operatorname{Outer}(\mathbb{P},\mathbb{Q}) := \dfrac{\mathbb{P}^*\mathbb{Q}-\mathbb{Q}^*\mathbb{P}}{2}.$
  - $\operatorname{Outer}(\mathbb{P},\mathbb{Q}) = p\boldsymbol{Q} - q\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}.$
- 偶积
  - $\operatorname{Even}(\mathbb{P},\mathbb{Q}) := \dfrac{\mathbb{PQ}+\mathbb{QP}}{2}.$

- $\mathrm{Even}(\mathbb{P},\mathbb{Q}) = (pq - \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}) + (p\boldsymbol{Q} + q\boldsymbol{P})$.

证明

- 点积

$$\begin{aligned} \boldsymbol{PQ} + \boldsymbol{QP} &= \sum p_i q_i (\boldsymbol{I}^2 + \boldsymbol{I}^2) + \sum p_i q_j (\boldsymbol{IJ} + \boldsymbol{JI}) && (24) \\ &= -2\sum p_i q_i = -2\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}. && (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{P}}\mathbb{Q} &= (p - \boldsymbol{P})(q + \boldsymbol{Q}) = pq + p\boldsymbol{Q} - q\boldsymbol{P} - \boldsymbol{PQ}, && (26) \\ \overline{\mathbb{Q}}\mathbb{P} &= (p + \boldsymbol{P})(q - \boldsymbol{Q}) = pq - p\boldsymbol{Q} + q\boldsymbol{P} - \boldsymbol{QP}, && (27) \\ \overline{\mathbb{P}}\mathbb{Q} + \overline{\mathbb{Q}}\mathbb{P} &= 2pq - \boldsymbol{PQ} - \boldsymbol{QP} = 2pq + 2\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q} = 2\mathbb{P}\cdot\mathbb{Q}. && (28) \end{aligned}$$

- 叉积

$$\begin{aligned} \mathbb{PQ} &= (pq - \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}) + (p\boldsymbol{Q} + q\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}), && (29) \\ \mathbb{QP} &= (pq - \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}) + (p\boldsymbol{Q} + q\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}), && (30) \\ \mathbb{PQ} - \mathbb{QP} &= 2\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q} = 2\mathbb{P}\times\mathbb{Q}. && (31) \end{aligned}$$

- 外积

$$\begin{aligned} \boldsymbol{PQ} &= -\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}, && (32) \\ \boldsymbol{QP} &= -\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}, && (33) \\ \mathrm{Outer}(\mathbb{P},\mathbb{Q}) &= p\boldsymbol{Q} - q\boldsymbol{P} - \boldsymbol{PQ} + \boldsymbol{QP} && (34) \\ &= p\boldsymbol{Q} - q\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\times\boldsymbol{Q}. && (35) \end{aligned}$$

- 偶积: 由叉积证明过程即得.

3 一元的运算

- 纯量部 (标量部)
  - $\mathrm{Scalar}(\mathbb{P}) = p$.
  - $\mathrm{Scalar}(\mathbb{P}) = 1\cdot\mathbb{P}$.
  - $\mathrm{Scalar}(\mathbb{P}) = \dfrac{\mathbb{P} + \mathbb{P}^*}{2}$.
- 向量部
  - $\mathrm{Vector}(\mathbb{P}) = \boldsymbol{P}$.
  - $\mathrm{Vector}(\mathbb{P}) = \mathrm{Outer}(1,\mathbb{P})$.
  - $\mathrm{Vector}(\mathbb{P}) = \dfrac{\mathbb{P} - \mathbb{P}^*}{2}$.
- 模
  - $|\mathbb{P}| := \sqrt{\mathbb{P}^*\mathbb{P}} = \sqrt{\overline{\mathbb{P}}\mathbb{P}}$.
  - $|\mathbb{P}| = \sqrt{\mathbb{P}\cdot\mathbb{P}} = \sqrt{p^2 - \boldsymbol{P}^2}$.
  - $|\mathbb{P}| = \sqrt{p^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$.
- 角度的度量
  - 符号数: $\mathrm{sgn}(\mathbb{P}) := \dfrac{\mathbb{P}}{|\mathbb{P}|}$.

- 另一表示: $\operatorname{sgn}(\mathbb{P})=\dfrac{\overline{\mathbb{P}^{-1}}}{|\mathbb{P}^{-1}|}$.
- 幅角: $\arg(\mathbb{P}):=\arccos\dfrac{p}{|\mathbb{P}|}$.

证明

- 纯量部与向量部: 由定义代入即得.
- 模: 即长度, 这里仅作总结, 结论均已证过.
- 符号数: $\operatorname{sgn}(\mathbb{P})=\dfrac{\mathbb{P}}{|\mathbb{P}|}=\overline{\mathbb{P}}^{-1}|\mathbb{P}|=\dfrac{\overline{\mathbb{P}^{-1}}}{|\mathbb{P}^{-1}|}$.

2.4 空间旋转公式

注：空间旋转公式即下文中的（37）（38）两式.

2.4.1 矩阵证法

前置知识：黎曼球面上关于单位向量 $\boldsymbol{v}=l\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k}$ 顺时针旋转 ψ 的变换，对应于复平面上莫比乌斯线性变换的矩阵形式为

$$[R_{\boldsymbol{v}}^{\psi}]=\begin{bmatrix}\cos\dfrac{\psi}{2}+in\sin\dfrac{\psi}{2} & (-m+il)\sin\dfrac{\psi}{2}\\ (m+il)\sin\dfrac{\psi}{2} & \cos\dfrac{\psi}{2}-in\sin\dfrac{\psi}{2}\end{bmatrix}. \tag{36}$$

如 2.1.1 中所说，这个式子我们不做证明，也不做解释，在本小节的推导里，只会以之作为推导的中间步骤.

- 旋转的矩阵 (可求复合)

  绕 $\boldsymbol{v}=l\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k}$ 旋转 ψ 的矩阵 $[R_{\boldsymbol{v}}^{\psi}]$.

  记 $\boldsymbol{V}=l\boldsymbol{I}+m\boldsymbol{J}+n\boldsymbol{K}$, 代入四元数的二阶矩阵形式, 可得

$$\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}=\cos\frac{\psi}{2}+\boldsymbol{V}\sin\frac{\psi}{2}=:\mathrm{e}^{\boldsymbol{V}\frac{\psi}{2}}. \tag{37}$$

- 旋转的效果 (可求象)

  一般的, $\mathcal{R}_{\hat{\tilde{p}}}^{\theta}=\mathcal{R}_{\hat{a}}^{\psi}\circ\mathcal{R}_{\hat{p}}^{\theta}\circ\mathcal{R}_{\hat{a}}^{-\psi}$, 即 $\mathbb{R}_{\widetilde{\boldsymbol{P}}}^{\theta}=\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\circ\mathbb{R}_{\boldsymbol{P}}^{\theta}\circ\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{-\psi}$.

  设 $\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}$ 将 $\boldsymbol{P}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 旋转到 $\widetilde{\boldsymbol{P}}$:

  在上式中令 $\theta=\pi$, 则二元旋转 $\mathbb{R}_{\boldsymbol{P}}^{\theta}$ 和 $\mathbb{R}_{\widetilde{\boldsymbol{P}}}^{\pi}$ 正是纯四元数 $\mathbb{P}$ 和 $\widetilde{\mathbb{P}}$, 故有

$$\widetilde{\mathbb{P}}=\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\mathbb{P}\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{-\psi}. \tag{38}$$

- 伸缩旋转
  - $\forall\mathbb{Q},\exists\boldsymbol{v},\psi:\mathbb{Q}=|\mathbb{Q}|\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}$, 即伸缩旋转.
  - 由旋转的象的公式得, 伸缩旋转的效果为:

$$\mathbb{P}\mapsto\widetilde{\mathbb{P}}=\mathbb{Q}\mathbb{P}\overline{\mathbb{Q}}. \tag{39}$$

2.4.2 反射证法

思路

若 $\mathbb{P}$ 与 $\mathbb{A}$ 为纯四元数, 则

- 正交的充要条件: $\mathbb{P}\mathbb{A}+\mathbb{A}\mathbb{P}=0$.
- 若 $\mathbb{A}$ 为单位纯四元数, 即 $\mathbb{A}^2=-1$,
  - 则上述方程化为 $\mathbb{P}=\mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{A}$.
  - 令 $\Pi_{\boldsymbol{A}}$ 表示以 $\boldsymbol{A}$ 为法向量的过原点的平面, 其方程为 $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}=0$.

    考虑变换 $\mathbb{P}\mapsto\mathbb{P}'=\mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{A}$,
    - $\mathbb{P}'$ 为纯四元数, 并且 $|\mathbb{P}'|=|\mathbb{P}|$, 于是该变换表示空间中的运动.
    - $\Pi_{\boldsymbol{A}}$ 上的每点均不动, 且正交于 $\Pi_{\boldsymbol{A}}$ 的向量均被反向, 于是该映射为**反射** $\mathfrak{R}_{\Pi_{\boldsymbol{A}}}$.
  - 若由 $\Pi_{\boldsymbol{A}}$ 到 $\Pi_{\boldsymbol{B}}$ 的角为 $\psi/2$, 两平面交线的单位向量为 $\boldsymbol{V}$, 则旋转 $\mathcal{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}=\mathfrak{R}_{\Pi_{\boldsymbol{A}}}\circ\mathfrak{R}_{\Pi_{\boldsymbol{B}}}$ 可表示为

$$\mathbb{P}\mapsto\widetilde{\mathbb{P}}=(-\mathbb{B}\mathbb{A})\mathbb{P}(-\overline{\mathbb{B}\mathbb{A}}).\tag{40}$$

  - 其中 $\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}=-\mathbb{B}\mathbb{A}=\cos\dfrac{\psi}{2}+\boldsymbol{V}\sin\dfrac{\psi}{2}$. ($\mathbb{P}$ 和 $-\mathbb{P}$ 的效果是一样的)

证明

由于是纯四元数, $\mathbb{P}\mathbb{A}+\mathbb{A}\mathbb{P}=-2\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}$, 因此得到第一点.

当 $\mathbb{A}^2=-1$, 第一点的两端同乘 $\mathbb{A}$ 即得 $\mathbb{P}=\mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{A}$.

$\mathbb{P}'$ 为纯四元数的结论, 可以代入值后展开, 这里采用向量法另证:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}'&=\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{A}) &(41)\\&=-(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{A}) &(42)\\&=-(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{P})\boldsymbol{A} &(43)\\&=\boldsymbol{P}-2(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}. &(44)\\|\mathbb{P}'|&=|\mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{A}|=|\mathbb{A}|\,|\mathbb{P}|\,|\mathbb{A}|=|\mathbb{P}|. &(45)\end{aligned}$$

不动点可用正交的等价条件证明, 这里继续使用向量法:

当 $\boldsymbol{P}\in\Pi_{\boldsymbol{A}}$ 时, $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}=0$, 于是 $\mathbb{P}'=\boldsymbol{P}$.

若 $\boldsymbol{P}\perp\Pi_{\boldsymbol{A}}$, 则 $\mathbb{P}'=\boldsymbol{P}-2\,|\boldsymbol{P}|\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}-2\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{P}$.

$$\mathbb{P}\mapsto\widetilde{\mathbb{P}}=\mathbb{B}(\mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{A})\mathbb{B}=(-\mathbb{B}\mathbb{A})\mathbb{P}(-\overline{\mathbb{B}\mathbb{A}}).\tag{46}$$

$$-\mathbb{B}\mathbb{A}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}=\cos\frac{\psi}{2}+\boldsymbol{V}\sin\frac{\psi}{2}.\tag{47}$$

2.4.3 向量证法

将 Σ 和 $\mathbb{C}$ 中的点用 $\mathbb{C}^2$ 中的齐次坐标向量表示, 如 $\mathfrak{p}=[\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2]^{\mathrm{T}}, z=p=\dfrac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{p}_2}$, 则

$$\mathfrak{p}\mapsto\widetilde{\mathfrak{p}}=\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\mathfrak{p}.\tag{48}$$

取 $\langle\mathfrak{p},\mathfrak{p}\rangle\equiv|\mathfrak{p}_1|^2+|\mathfrak{p}_2|^2=2$, 则 Σ 与 $\mathbb{C}$ 中点的换算公式为

$$
\begin{cases}
X + \mathrm{i}Y = \dfrac{2z}{1+|z|^2} = \dfrac{2\mathfrak{p}_1\overline{\mathfrak{p}}_2}{|\mathfrak{p}_1|^2+|\mathfrak{p}_2|^2} = \mathfrak{p}_1\overline{\mathfrak{p}}_2, \\
Z = \dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1} = \dfrac{|\mathfrak{p}_1|^2-|\mathfrak{p}_2|^2}{|\mathfrak{p}_1|^2+|\mathfrak{p}_2|^2} = |\mathfrak{p}_1|^2 - 1.
\end{cases} \tag{49}
$$

记 p 的球极射影象 $\hat{p}$ 对应的单位向量为 $\boldsymbol{P} = (X, Y, Z)$, 则

$$
\mathbb{P} = X\boldsymbol{I} + Y\boldsymbol{J} + Z\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \mathrm{i}Z & -Y + \mathrm{i}X \\ Y + \mathrm{i}X & -\mathrm{i}Z \end{bmatrix} \tag{50}
$$

注意到

$$
1 - \mathrm{i}\mathbb{P} = \begin{bmatrix} 1+Z & X+\mathrm{i}Y \\ X-\mathrm{i}Y & 1-Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{p}_1\overline{\mathfrak{p}}_1 & \mathfrak{p}_1\overline{\mathfrak{p}}_2 \\ \mathfrak{p}_2\overline{\mathfrak{p}}_1 & \mathfrak{p}_2\overline{\mathfrak{p}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{p}_1 \\ \mathfrak{p}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\mathfrak{p}}_1 & \overline{\mathfrak{p}}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\mathfrak{p}}\boldsymbol{\mathfrak{p}}^*. \tag{51}
$$

于是有

$$
\begin{aligned}
1 - \mathrm{i}\widetilde{\mathbb{P}} &= \widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{p}}}\widetilde{\boldsymbol{\mathfrak{p}}}^* = \left(\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\boldsymbol{\mathfrak{p}}\right)\left(\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\boldsymbol{\mathfrak{p}}\right)^* = \mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\boldsymbol{\mathfrak{p}}\boldsymbol{\mathfrak{p}}^*\left(\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\right)^* \qquad (52) \\
&= \mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\left(1 - \mathrm{i}\mathbb{P}\right)\left(\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\right)^* = 1 - \mathrm{i}\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\mathbb{P}\left(\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\right)^*. \qquad (53)
\end{aligned}
$$

从而得到 $\widetilde{\mathbb{P}} = \mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{\psi}\mathbb{P}\mathbb{R}_{\boldsymbol{v}}^{-\psi}$.

参考文献

简单列一下主要参考的书和网站:

1. Tristan Needham 的《复分析:可视化方法》
2. https://www.zhihu.com/question/47736315
3. https://www.cnblogs.com/wtyuan/p/12324495.html
4. https://zhuanlan.zhihu.com/p/435306687